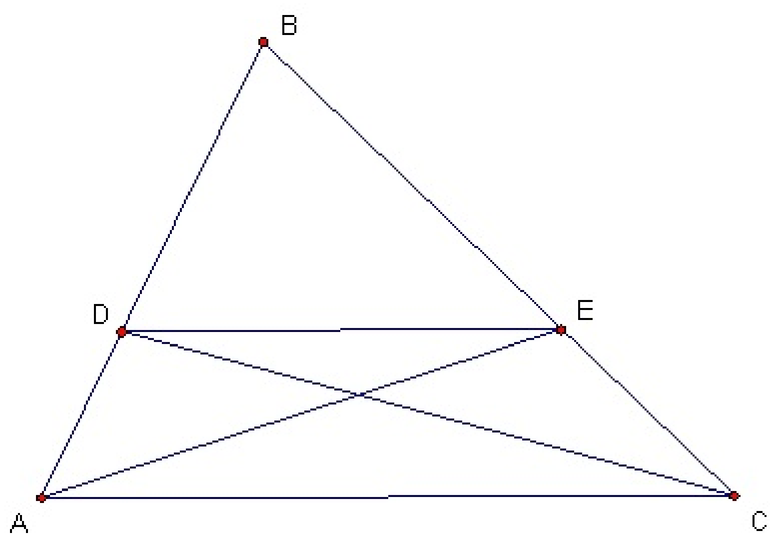
Euclid VI.2

Jacob Nielsen[1]

Euclid VI.2

En linje parallel med en side i en trekant deler de to andre sider i det samme forhold. Og omvendt gælder også, at hvis en linje deler to sider i en trekant i samme forhold, så er linjen parallel med den tredje side i trekanten.



Påstandene i sætningen kan nu kort skrives:

$$DE \parallel AC \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AD}{DB} = \frac{EC}{EB}$$

I det følgende betyder ABC: arealet af ΔABC. To trekanter har samme areal, hvis længden af grundlinjerne og højderne er ens. **Euclid I.31 -** eller tænk på, at en trekants areal er en halv gange højden gange grundlinjens længde.

Heraf følger: DAE = EDC. ΔDAE og ΔEDC har nemlig DE som fælles grundlinje, og højderne på DE´s forlængelse er også ens, fordi DE og AC er parallelle.

[1] Datadrev\Matematik\Geometri\Euclid VI4 130909.

Hvis to trekanter har samme højde må forholdet mellem deres arealer være det samme som forholdet mellem grundlinjerne. ∆DBE og ∆ADE har samme højde på linjen AB, Derfor gælder:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AED}{EBD}=\frac{EDC}{EBD}$$

På samme måde indses, at:

$$\frac{EC}{EB}=\frac{EDC}{EBD}$$

Kombination af de to ligninger ovenfor giver påstanden svarende til sætningens implikationspil mod højre.

Vi ser nu på “pilen den anden vej”. Det er altså givet, at linjen DE deler trekantens sider i samme forhold, og vi skal så vise, at siderne DE og AC er parallelle. Bruger vi igen, at forholdet mellem arealerne af trekanter med samme højde er lig med forholdet mellem grundlinjerne, får vi igen de to ligninger ovenfor, og der følger at AED=EDC.

$$\frac{AD}{DB}=\frac{EC}{EB} \Leftrightarrow \frac{AED}{EBD}=\frac{EDC}{EBD} \Leftrightarrow AED=EDC$$

Men ∆AED og ∆EDC har samme grundlinje: DE, og da de har samme areal, må de have samme højde på DE´s forlængelse. Altså har A og C samme vinkelrette afstand til DE. Så må AC og DE være parallelle.

Q.E.D